ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THÚY HÒA

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM HAI LẦN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THÚY HÒA

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM HAI LẦN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Trịnh Thanh Hải

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Toán tổ hợp là một bài toán khó, thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp quốc gia và quốc tế. Chính vì vậy toán tổ hợp luôn dành được sự quan tâm rất lớn từ các bạn học sinh, các thầy, cô giáo và các nhà toán học. Mặc dù vậy, tài liệu cho toán tổ hợp dành cho học sinh giỏi ở Việt nam vẫn còn rất ít và hạn chế.

Phương pháp đếm hai lần “double counting” đã được nhóm tác giả Law Ka Ho, Leung Tat Wing và Li Kim Jin đăng tải trên tạp chí Mathematical Excalibur (Volume 13, Number 4, 2008) đưa ra các minh họa sinh động cho việc vận dụng phương pháp đếm hai lần vào giải một vài đề thi toán quốc tế.

Xuất phát từ thực tế trên và với mục đích tích lũy thêm các kiến thức về cách giải các bài toán đếm của toán tổ hợp với phương pháp đếm hai lần và vận dụng vào giải một số bài toán đếm trong các đề thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế làm tư liệu cho công việc giảng dạy của bản thân, tôi đã lựa chọn hướng nghiên cứu vận dụng phương pháp đến hai lần vào giải một số bài toán đếm.

Luận văn tập trung vào hoàn thành các nhiệm vụ chính sau:

- Tìm hiểu bài toán đếm của toán tổ hợp và các nguyên lý, tính chất của toán tổ hợp thường được vận dụng để đưa ra lời giải cho các bài toán đếm.

- Cơ sở toán học của phương pháp “Đếm hai lần” trong việc tìm lời giải cho bài toán đếm của toán tổ hợp.

- Sưu tầm một số bài toán, đề thi và bài toán đếm của toán tổ hợp dành cho học sinh giỏi.

- Đưa ra lời giải bằng cách vận dụng phương pháp "Đếm hai lần" cho một số bài toán đếm dành cho học sinh giỏi.

Ngoài ra luận văn cũng đưa ra các cách giải khác nhau của cùng một bài toán đếm và so sánh những phương pháp giải đó với việc vận dụng phương pháp đếm hai lần để có những nhận xét thú vị.

Thái Nguyên, ngày 31 tháng 3 năm 2019

Tác giả luận văn

Đỗ Thị Thúy Hòa

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Đặt vấn đề

Như chúng ta biết, các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp được hình thành từ các phép đếm. Các khái niệm này ra đời giúp chúng ta trình bày bài toán đếm đơn giản hơn. Tuy nhiên, khi gặp các bài chứng minh các đẳng thức liên quan đến hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp thì chúng ta thường sử dụng các biến đổi đại số hoặc khai triển nhị thức Newton để chứng minh. Do đó, việc chứng minh các bài toán tổ hợp và các khái niệm của nó không có mối quan hệ nào. Điều này ít nhiều làm mất đi vẻ đẹp của các khái niệm toán học nói chung và các khái niệm về hoán vị, chỉnh hợp nói riêng. Trong nội dung chương 1 của luận văn, tôi sẽ giới thiệu cách chứng minh các bài toán tổ hợp bằng phương pháp đếm. Nội dung mục này được tham khảo chủ yếu trong tài liệu [1] và một số bài toán hay trong các đề thi học sinh giỏi được tác giả sưu tầm và trình bày.

1.1.1 Cơ sở của phương pháp đếm

Một bài toán tổ hợp thường liên quan mật thiết với việc "đếm" số khả năng thực hiện một hành động nào đó. Phép đếm có hai quy tắc cơ bản là phép cộng và phép nhân.

Quy tắc 1.1 (Quy tắc cộng). *Giả sử có k công việc $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Các việc này có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2, \ldots, n_k$ cách và giả sử không có hai* *việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong k việc đó là $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.*

Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp như sau: Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hợp hữu hạn đôi một rời nhau, tức là $\forall 1 \leq i, j \leq n,\ A_i \cap A_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$. Khi đó số cách chọn a_1, hoặc $a_2, \ldots$, hoặc a_n sẽ bằng số cách chọn phần tử a thuộc $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ và bằng $|\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k| = \sum\limits_{k}^{n} |A_k|$.

Ví dụ 1.1. *Trong một tiết tự học, trên bàn giáo viên có 10 quyển sách tiếng Anh, 10 quyển bài tập Toán và 5 quyển bài tập Hóa. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một quyển sách?*

Chứng minh. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là tập các quyển sách tiếng Anh, bài tập Toán và bài tập Hóa. Khi đó, có 10 cách chọn một quyển sách tiếng Anh, tức là $|A_1| = 10$. Có 10 cách chọn một quyển bài tập Toán, tức là $|A_2| = 10$. Có 5 cách chọn một quyển bài tập Hóa, nghĩa là $|A_3| = 5$.

Vậy, theo quy tắc cộng, số cạch chọn một quyển sách là

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| = 10 + 10 + 5 = 25.$$

□

Bản chất toán học của quy tắc cộng là công thức tính số phần tử của hợp n tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau. Tuy nhiên trong nhiều bài toán tổ hợp, chúng ta phải tính số phần tử của hợp n tập hợp bất kì (không nhất thiết rời nhau). Khi đó, ta có quy tắc cộng cho số phần tử của hợp của n tập hợp bất kỳ, thường được gọi là công thức bao hàm và loại trừ.

Định lý 1.1 (Công thức bao hàm và loại trừ)**.** *Cho $n \geq 2$ tập hợp hữu hạn*

$A_1, \ldots, A_n$. Khi đó ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<k\le n} |A_i \cap A_k| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$+ \cdots + \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$
$$+ \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Ví dụ 1.2. *Trong tập $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho $2, 3, 5, 7$?*

Chứng minh. Ta sẽ đếm xem trong tập S có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số $2, 3, 5, 7$.

Kí hiệu $A_1 = \{k \in S |\ k \ \vdots\ 2\}, A_2 = \{k \in S |\ k \ \vdots\ 3\}, A_3 = \{k \in S |\ k \ \vdots\ 5\}, A_4 = \{k \in S |\ k \ \vdots\ 7\}$. Khi đó $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ là tập hợp các số chia hết cho ít nhất một trong các số $2, 3, 5, 7$. Ta có:

$$|A_1| = \left[\frac{280}{2}\right] = 140,\ |A_2| = \left[\frac{280}{3}\right] = 93,\ |A_3| = \left[\frac{280}{5}\right] = 56;$$
$$|A_4| = \left[\frac{280}{7}\right] = 40,\ |A_1 \cap A_2| = \left[\frac{280}{2.3}\right] = 46,\ |A_1 \cap A_3| = \left[\frac{280}{2.5}\right] = 28;$$
$$|A_1 \cap A_4| = \left[\frac{280}{2.7}\right] = 20,\ |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{3.5}\right] = 18,\ |A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{3.7}\right] = 13;$$
$$|A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{5.7}\right] = 8,\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{2.3.5}\right] = 9;$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{2.3.7}\right] = 6,\ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{2.5.7}\right] = 4;$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{3.5.7}\right] = 2,\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{2.3.5.7}\right] = 1;$$

Sử dụng công thức bao hàm và loại trừ ta được

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 140 + 93 + 56 + 40 - 46 - 28 - 20 - 18$$
$$- 13 - 8 - 9 - 6 - 4 - 2 + 1 = 216.$$

Như vậy trong tập S có $280 - 216 = 64$ số không chia hết cho $2, 3, 5, 7$. □

Quy tắc 1.2 (Quy tắc nhân)**.** *Cho n đối tượng $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nếu có m_1 cách chọn đối tượng a_1 và với mỗi cách chọn a_1 có m_2 cách chọn đối tượng*

a_2, sau đó với mỗi cách chọn a_1, a_2 có m_3 cách chọn $a_3, \ldots$ Cuối cùng với mỗi cách chọn $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ có m_n cách chọn đối tượng a_n. Như vậy ta có $m_1.m_2 \ldots m_{n-1}.m_n$ cách chọn đối tượng a_1, rồi chọn đối tượng a_2, rồi đến $a_3, \ldots,$ rồi đến a_n.

Tương tự như quy tắc cộng, quy tắc nhân phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau: Giả sử có n tập hợp hữu hạn $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó, số cách chọn (S) bộ gồm n phần tử $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ với $a_i \in A_i$, $(1 \leq i \leq n)$ sẽ là

$$S = |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = m_1.m_2 \ldots m_n = \prod_{k=1}^{n} m_k.$$

Ví dụ 1.3. *Từ các chữ số $\{0, 1, 3, 5, 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau?*

Chứng minh. Ta gọi số tự nhiên có 3 chữ số cần tìm là $\overline{abc}$. Ta thấy, có 4 cách chọn a, 4 cách chọn b và 3 cách chọn c từ các chữ số $\{0, 1, 3, 5, 7\}$. Như vậy theo quy tắc nhân, ta có $4.4.3 = 48$ số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau. □

Để áp dụng quy tắc nhân, điều cốt yếu là phải thiết kế một mô hình gồm việc thực hiện nhiều công đoạn. Số cách thực hiện ở mỗi công đoạn phải không phụ thuộc vào cách nào đã thực hiện ở công đoạn trước đó. Thành thử, muốn sử dụng được quy tắc nhân, mô hình của ta bao gồm việc thực hiện liên tiếp các công đoạn và số cách thực hiện ở mỗi công đoạn phải như nhau với mọi cách đã thực hiện ở công đoạn trước đó.

Ví dụ 1.4. *Có bốn người A, B, C, D cần chọn ba người vào chức Giám đốc, Kế toán trưởng và Chủ tịch Hội đồng quản trị. Giả sử việc chọn nhân sự phải thảo mãn yêu cầu: Ông A không thể được chọn làm Giám đốc, chức Chủ tịch HĐQT phải là ông C hoặc ông D. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?*

Giải. Việc chọn ba vị trí chức Giám đốc, Kế toán trưởng và Chủ tịch Hội đồng quản trị tiến hành theo 3 công đoạn:

Công đoạn 1: Chọn Giám đốc: có 3 cách chọn (chọn B, C, D).

Công đoạn 2: Chọn Kế toán trưởng: có 3 cách chọn Kế toán trưởng từ ba người còn lại.

Công đoạn 3: Chọn Chủ tịch Hội đồng quản trị: có 2 cách chọn (ông C hoặc D). Theo quy tắc nhân thì có $3.3.2 = 18$ cách chọn. Tuy nhiên đáp số này không chính xác vì số cách thực hiện công đoạn 3 phụ thuộc vào kết quả của các công đoạn 1 và 2 trước đó. Nếu ở các công đoạn trước, ông C và ông D đã được chọn thì ở công đoan 3 chỉ có 1 cách hoặc không có.

Tuy nhiên, nếu việc chọn ba vị trí Giám đốc, Kế toán trưởng và Chủ tịch hội đồng quản trị được tiến hành theo ba công đoạn khác thì vẫn có thể áp dụng quy tắc nhân. Cụ thể như sau:

Công đoạn 1: Chọn Chủ tịch hội đồng quản trị: có 2 cách chọn C hoặc D.

Công đoạn 2: Chọn Giám đốc: Ta luôn có 2 cách chọn dù kết quả của công đoạn 1 thế nào. Sau công đoạn 1 còn 3 người, trong đó có ông A. Bỏ ông A ra thì còn 2 người có thể chọn vào chức Giám đốc.

Công đoạn 3: Chọn Kế toán trưởng: luôn có 2 cách từ 2 người còn lại.

Vậy có $2.2.2 = 8$ cách chọn. □

Việc chia giai đoạn trong bài toán trên là ví dụ minh họa cho chúng ta thấy những bước cụ thể để thực hiện công việc cần làm. Chúng ta có thể không cần trình bày cụ thể các giai đoạn trong lời giải. Ngoài ra, để giải quyết một bài toán, chúng ta có thể kết hợp nhiều quy tắc khác nhau. Do vậy, chúng ta cần nắm rõ các quy tắc để áp dụng trong các trường hợp cụ thể.

Tiếp theo, chúng ta sẽ đề cập đến Nguyên lý ngăn kéo Dirichlet. Người đầu tiên đề xuất ra nguyên lý này là nhà toán học người Đức Perter Guster Dirichlet (1805-1859) khi ông đề cập tới nó với tên gọi "nguyên lý ngăn kéo" (Schubfachprinzip). Người ta thường gọi "nguyên lý ngăn kéo Dirichlet" hay đôi khi gọi gọn là "nguyên lý Dirichlet" (tên gọi gọn này có thể gây ra nhầm lẫn với nguyên lý Dirichlet về hàm điều hòa). Có nhiều cách phát biểu cho nguyên lý ngăn kéo Diriclet (đối tượng phát biểu là chim hoặc thỏ). Nội dung nguyên lý như sau: *Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.* Đây được coi như nguyên lý Dirichlet cơ bản.

Nguyên lý 1.1 (Nguyên lý ngăn kéo Dirichlet mở rộng)**.** *Nếu nhốt n con*